ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ

Παραγοντικά και Συνδυασμοί:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (n-1) \cdot n$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

Βασικές Ταυτότητες:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \binom{n}{3}a^{n-3}b^3 + \cdots \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + b^n$$

Τύπος του Τριωνύμου:

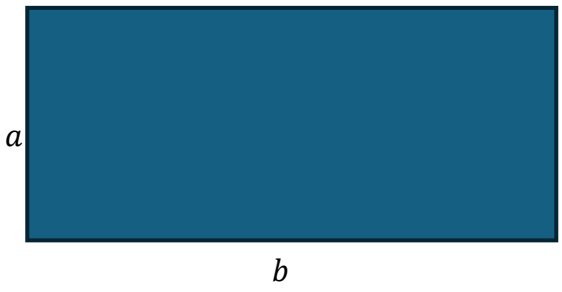
Οι λύσεις της εξίσωσης $ax^2 + bx + c = 0$ δίνονται από τον τύπο:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Επιφάνειες στο Επίπεδο:

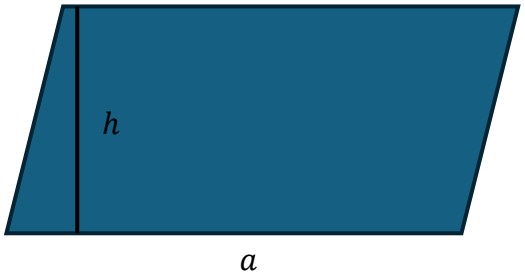
Ορθογώνιο Παραλληλόγραμμο:

$A = a \cdot b$



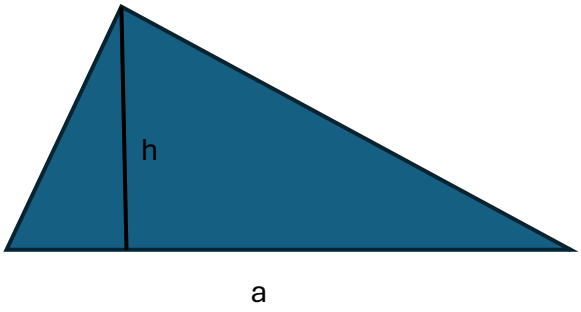
Παραλληλόγραμμο:

$A = a \cdot h$



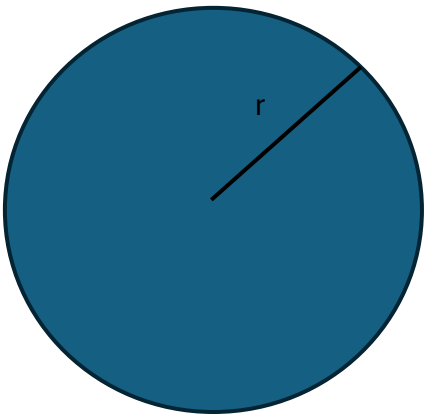
Τρίγωνο:

$A = \frac{1}{2} a \cdot h$



Κύκλος:

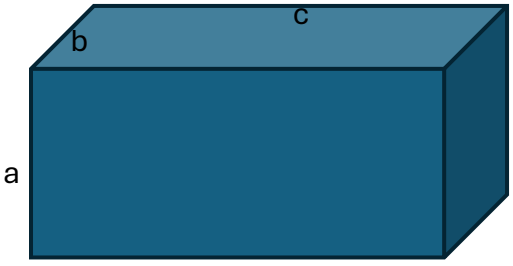
$A = \pi r^2$

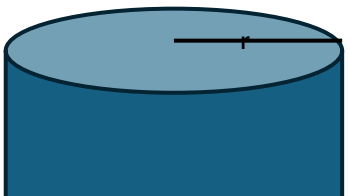


Στερεά:

Όγκος Ορθογωνίου Παραλληλεπιπέδου:

$V = abc$



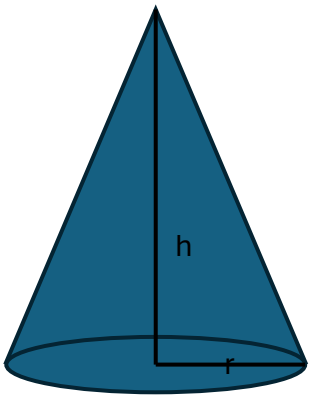


Όγκος Κυλίνδρου:

$V = \pi r^2 h$

Όγκος Κώνου:

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

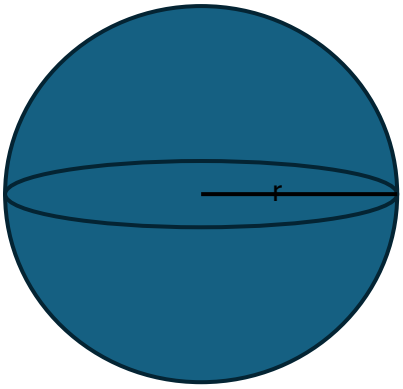


Επιφάνεια Κώνου:

$A = \pi r^2 + \pi r l, \;\; l = \sqrt{r^2 + h^2}$

Όγκος Σφαίρας:

$V = \frac{4}{3}\pi r^3$



Επιφάνεια Σφαίρας:

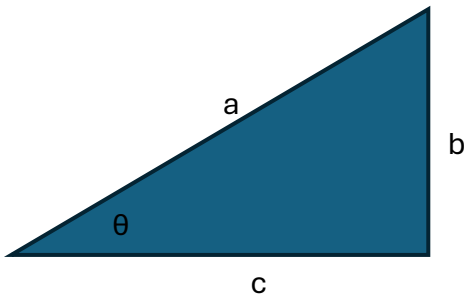
$A = 4\pi r^2$

Τριγωνομετρία:

Βασικές τριγωνομετρικές συναρτήσεις:

$\sin\theta = \frac{b}{a} \qquad \cos\theta = \frac{c}{a}$

$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{b}{c} \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{c}{b}$



$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{a}{c}$ $\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta} = \frac{a}{b}$

Τριγωνομετρικές συναρτήσεις βασικών γωνιών:

	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$
$\sin\theta$	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$
$\cos\theta$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$
$\tan\theta$	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$

Πυθαγόρειο Θεώρημα στην τριγωνομετρία:

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$

Γωνίες σε τεταρτημόρια:

$\sin(-\theta) = -\sin\theta$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} \pm \theta\right) = \cos\theta$	$\sin(\pi \pm \theta) = \mp\sin\theta$	$\sin\left(\frac{3\pi}{2} \pm \theta\right) = -\cos\theta$
$\cos(-\theta) = \cos\theta$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} \pm \theta\right) = \mp\sin\theta$	$\cos(\pi \pm \theta) = -\cos\theta$	$\cos\left(\frac{3\pi}{2} \pm \theta\right) = \pm\sin\theta$

Τύποι αθροίσματος:

$\sin(\theta \pm \varphi) = \sin\theta\cos\varphi \pm \cos\theta\sin\varphi$

$\cos(\theta \pm \varphi) = \cos\theta\cos\varphi \mp \sin\theta\sin\varphi$

$\tan(\theta \pm \varphi) = \frac{\tan\theta \pm \tan\varphi}{1 \mp \tan\theta\tan\varphi}$

Τύποι διπλάσιου τόξου:

$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta$

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

Τύποι αποτετραγωνισμού:

$$\sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$$

$$\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$$

Μετατροπή αθροίσματος σε γινόμενο:

$$\sin\theta + \sin\varphi = 2\sin\frac{\theta+\varphi}{2}\cos\frac{\theta-\varphi}{2}$$

$$\sin\theta - \sin\varphi = 2\cos\frac{\theta+\varphi}{2}\sin\frac{\theta-\varphi}{2}$$

$$\cos\theta + \cos\varphi = 2\cos\frac{\theta+\varphi}{2}\cos\frac{\theta-\varphi}{2}$$

$$\cos\theta - \cos\varphi = -2\sin\frac{\theta+\varphi}{2}\sin\frac{\theta-\varphi}{2}$$

Μετατροπή γινομένου σε άθροισμα:

$$\sin\theta\cos\varphi = \frac{1}{2}(\sin(\theta+\varphi) + \sin(\theta-\varphi))$$

$$\cos\theta\cos\varphi = \frac{1}{2}(\cos(\theta+\varphi) + \cos(\theta-\varphi))$$

$$\sin\theta\sin\varphi = -\frac{1}{2}(\cos(\theta+\varphi) - \cos(\theta-\varphi))$$

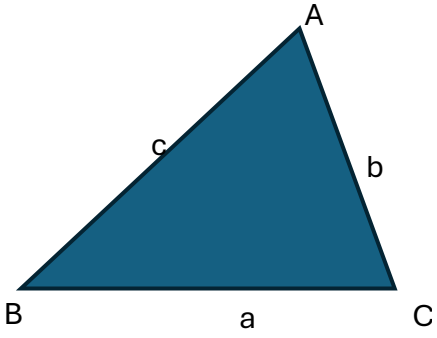
Νόμοι σε γενικά τρίγωνα:

Νόμος ημιτόνων:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Νόμος συνημιτόνων:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$



Ιδιότητες λογαρίθμων:

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a x^p = p \log_a x$$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

(Παρατήρηση: $\ln x = \log_e x$ είναι ο Νεπέριος λογάριθμος)

Βασικά αθροίσματα:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

Βασικές άπειρες σειρές Taylor κοντά στο $x = 0$:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \cdots \qquad |x| < 1$$

$$\frac{1}{1 + x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots, \qquad |x| < 1$$

Παράγωγοι:

Ορισμός:

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{y\to x}\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$$

Βασικές παράγωγοι:

$(x^n)' = nx^{n-1}$

$(e^x)' = e^x$

$(a^x)' = a^x \ln a$

$(\sin x)' = \cos x$

$(\cos x)' = -\sin x$

$(\ln x)' = 1/x$

$$(\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arctan(x))' = \frac{1}{1+x^2}$$

Βασικές ιδιότητες:

Αν $f(x) = c$, τότε $f'(x) = 0$

$$\big(af(x) + bg(x)\big)' = af'(x) + bg'(x)$$

$$\big(f(x)\cdot g(x)\big)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

$$\frac{df(g(x))}{dx} = f'(g(x))\cdot g'(x)$$

$$\frac{df^{-1}(y)}{dy} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \quad \alpha\nu\ f'(f^{-1}(y)) \neq 0$$

Διαφορικά:

$$df(x) = f'(x)dx$$

Κανόνας Νεύτωνα:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Ολοκληρώματα:

Βασικά Ολοκληρώματα:

$$\int a dx = ax + C$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \ \ n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

Ιδιότητες των Ολοκληρωμάτων:

$$\int \big(af(x) + bg(x)\big)dx = a\int f(x)dx + b\int g(x)dx$$

$$\int f'(x) \cdot g(x)dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x)g'(x)dx$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$$

$$\int F'(g(x)) \cdot g'(x)dx = F\big(g(x)\big) + C$$